**Лекция 13**

*Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки:*

* *Динамические уравнения Эйлера*

Теорема об изменении кинетического момента твердого тела относительно его неподвижной точки O под действием сил, главный момент которых относительно этой же точки равен . Далее получаем: , где - угловая скорость твердого тела.

Орты подвижного репера , жестко связанного с телом, направлены по главным осям инерции этого тела, и и – координаты векторов , в подвижном репере.

В рассматриваемом случае , , . Относительная производная - производная в подвижном репере. Отсюда следует: . Проектируя равенство на подвижные орты, получаем динамические уравнения Эйлера:

* *Кинематические уравнения Эйлера*

- могут быть функциями не только времени и неизвестных динамических уравнений Эйлера, но и других переменных: другими переменными могут быть углы Эйлера ϕ, ψ, ϑ. Чтобы интегрировать динамические уравнения Эйлера в этих случаях нужно дополнить какими-то уравнениями относительно всех тех переменных, от которых величины зависят. Дифференциальные уравнения относительно углов Эйлера (кинематические уравнения Эйлера):

ϑ +

ϑ +

*Уравнения движения свободного твердого тела*

Рассмотрим движение твердого тела в репере . В то же время с телом свяжем подвижный репер , где С - центр масс твердого тела, а направлены по его главным центральным осям инерции.

и - координаты векторов , в подвижном репере. Выведем динамические уравнения Эйлера для данного (свободного) движения:

Также выведем кинематические уравнения Эйлера:

ϑ +

ϑ +

Для определения положения и скоростей точек твердого тела в неподвижном репере достаточно знать радиус-вектор и скорость центра масс C. Эти величины нам дает теорема о движении центра масс твердого тела: , где m – масса, - главный вектор действующих на него сил.

Приведённые выше уравнения - уравнениями движения свободного твердого тела.

*Динамика точки с переменной массой*

*Материальной точкой* *переменной массы* - геометрическая точка, снабженная массой, величина которой зависит от времени. *Тело переменной массы* - твердое тело, плотность которого есть функция не только координат, но и времени.

*Уравнение Мещерского*

**Биография Ивана Всеволодовича Мещерского:**

Родился в городе Архангельске в небогатой семье. В 1878 г. поступил на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета. Это было время расцвета Петербургской математической школы, созданной [П. Л. Чебышевым](http://www.people.su/121728). Здесь Мещерский с интересом слушал лекции как самого Чебышева, так и известных в то время профессоров [А. Н. Коркина](http://www.people.su/56833) (1837—1908), [К. А. Поссе](http://www.people.su/89319) (1847—1928) и многих других.

В студенческие годы Мещерский с особым интересом занимался механикой. В 1882 г. он окончил университет и был оставлен для подготовки к профессорскому званию. С этого времени начинается его более чем полувековая научно-педагогическая деятельность. В 1891 г. он получил кафедру механики на Петербургских высших женских курсах, которую занимал до 1919 г., то есть до слияния этих курсов с университетом. В 1897 г. Мещерский успешно защитил в Петербургском университете диссертацию на тему «Динамика точки переменной массы», представленную, им для получения степени магистра прикладной математики.

В 1902 г. он был приглашён заведовать кафедрой в Петербургский политехнический институт. Здесь до конца жизни протекала его основная научно-педагогическая работа. И. В. Мещерский 25 лет вёл педагогическую работу в Петербургском университете и 33 года в Политехническом институте. За эти годы он обучил тысячи специалистов. Многие его слушатели стали крупными учёными (академик А. Н. Крылов, профессор Г. В. Колосов и др.).

За выдающиеся заслуги в области науки И. В. Мещерскому в 1928 году было присвоено звание заслуженного деятеля науки. Его именем назван кратер на Луне.

Широко известен его курс теоретической механики и особенно его «Сборник задач по теоретической механике» (1914), выдержавший 36 изданий и принятый в качестве учебного пособия для высших учебных заведений не только в СССР, но и в ряде зарубежных стран. Сборник Мещерского, как и его работа «Преподавание механики и механические коллекции в некоторых высших учебных заведениях Италии, Франции, Швейцарии и Германии» (1895), немало способствовали подъёму научного и педагогического уровня преподавания механики в высших учебных заведениях России.

Во втором выдающемся труде Мещерского «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае» (1904) его теория получила окончательное и в высшей степени изящное выражение. Здесь он устанавливает и исследует общее уравнение движения точки, масса которой изменяется от одновременного процесса присоединения и отделения материальных частиц. Это уравнение известно как уравнение Мещерского.

И. В. Мещерский не только разработал теоретические основы динамики переменной массы, но и рассмотрел большое количество частных задач о движении точки переменной массы, например восходящее движение ракеты и вертикальное движение аэростата. Он подверг весьма обстоятельному исследованию движение точки переменной массы под действием центральной силы, заложив тем самым основания небесной механики тел переменной массы. Он исследовал также и некоторые проблемы движения комет.

И. В. Мещерский впервые сформулировал и так называемые обратные задачи, когда по заданным внешним силам и траекториям определяется закон изменения массы. Кроме работ по механике переменных масс, ему принадлежит ряд работ по общей механике. Заслуги Мещерского в науке чрезвычайно велики. Однако лишь с началом полётов в космос с достаточной полнотой выяснилось огромное практическое значение его исследований по механике переменных масс.

После Второй мировой войны стало появляться большое число глубоких теоретических исследований, посвящённых как специальным проблемам ракетодинамики и динамики тел переменной массы, так и значительному обобщению результатов исследований Мещерского. Опираясь на его труды, многие советские и зарубежные учёные разработали основные вопросы динамики твёрдого тела произвольных изменяемых систем переменной массы. Технический прогресс в области реактивного движения наглядно показывает проницательность и глубину научных исканий Мещерского.

В историю науки Мещерский вошёл как основоположник механики тел переменной массы. Его исследования в этой области явились теоретической основой современной ракетодинамики. Его имя неразрывно связано с именем одного из создателей научных основ космонавтики — К. Э. Циолковского.

Рассматриваем на промежутке времени механическую систему, образованную частицами, из которых состоит материальная точка в момент времени t, и частицами, которые присоединяются к этой точке за этот промежуток времени. Пусть:

- масса материальной точки в момент t

- суммарная масса всех присоединившихся частиц за промежуток времени

- суммарная масса всех отсоединившихся частиц за промежуток времени

- скорость материальной точки в момент t

- скорость центра масс всех присоединившихся частиц в момент t

- скорость центра масс всех присоединившихся частиц в момент t

Если - главный вектор количества движения рассматриваемой системы, то и , откуда можно получить: и ( - главный вектор внешних сил, приложенных к системе)

Из полученных выше уравнений получаем уравнение Мещерского движения материальной точки переменной массы:

,

а (реактивная сила)

и ,

(относительные скорости центров масс присоединяющихся и отделяющихся частиц в момент t).

*Первая задача Циолковского*:

**Биография русского и советского учёного-**[**автодидакт**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B2%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%B4%D0%B0%D0%BA%D1%82)**а, разрабатывавшего теоретические вопросы**[**космонавтики**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%81%D0%BC%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)**, и мыслителя**[**эзотерической**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B7%D0%BE%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%BC)**ориентации, занимавшегося философскими проблемами освоения космоса, Константина Эдуардовича Циолковского:**

Происходил из [шляхетского](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%BB%D1%8F%D1%85%D1%82%D0%B0) рода герба [Ястржембец](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D1%81%D1%82%D1%80%D1%88%D0%B5%D0%BC%D0%B1%D0%B5%D1%86" \o "Ястршембец). Почти полностью оглохнув в детстве в результате [скарлатины](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D1%80%D0%BB%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BD%D0%B0), Циолковский не получил систематического образования (проучился четыре года в [Вятской гимназии](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%8F%D1%82%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D0%B8%D0%BC%D0%BD%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D1%8F) и три года занимался [самообразованием](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B0%D0%BC%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5)). В 1879 году сдал экзамен на звание народного учителя и до 1921 года преподавал математику и физику в училищах [Боровска](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA) и [Калуги](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D0%BB%D1%83%D0%B3%D0%B0), параллельно пытаясь заинтересовать научное сообщество своими проектами [аэропланов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%8D%D1%80%D0%BE%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD) и [цельнометаллического дирижабля](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%80%D0%B8%D0%B6%D0%B0%D0%B1%D0%BB%D1%8C_%D0%A6%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE), а впоследствии — и ракетной техники. Опубликовал за свой счёт множество трудов, в том числе посвящённых обоснованию идеи космического [пантеизма](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B8%D0%B7%D0%BC).

Циолковский дослужился до [коллежского асессора](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BB%D0%B5%D0%B6%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D1%81%D0%B5%D1%81%D1%81%D0%BE%D1%80) (1889), за учительские успехи был награждён [орденом Св. Станислава](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%80%D0%B4%D0%B5%D0%BD_%D1%81%D0%B2._%D0%A1%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0%D0%B2%D0%B0) третьей степени (1906). В 1920 году был принят членом [Русского общества любителей мироведения](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D1%83%D1%81%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE_%D0%BB%D1%8E%D0%B1%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%B9_%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F), удостоился персональной пенсии советского правительства, а в 1932 году — [ордена Трудового Красного Знамени](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%80%D0%B4%D0%B5%D0%BD_%D0%A2%D1%80%D1%83%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%9A%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%97%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B8).

В своих [научно-фантастических](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) произведениях, будучи сторонником и [пропагандистом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%BF%D0%B0%D0%B3%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D0%B8%D1%81%D1%82) идей освоения космического пространства, Циолковский предлагал заселить космическое пространство с использованием орбитальных станций, выдвинул идеи [космического лифта](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%81%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%BB%D0%B8%D1%84%D1%82), поездов на воздушной подушке. Считал, что развитие жизни на одной из планет когда-нибудь достигнет такого могущества и совершенства, которое позволит преодолеть силы тяготения и распространить жизнь по всей Вселенной. Необходимым этапом к расселению человечества в Космосе он считал возвышение интеллектуалов и выведение человечества, лишённого страстей, но с великим разумом, который позволит осуществить «рациональное умиротворённое существование». Эта эзотерическая утопия Циолковского послужила ведущим стимулом для разработки оснований ракетно-космической техники.

Циолковский обосновал также использование [ракет](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%BA%D0%B5%D1%82%D0%B0) для полётов в космос, ещё в 1920-е годы пришёл к выводу о необходимости использования «ракетных поездов» — прототипов многоступенчатых ракет; осмысливал вопросы выживания человека в [невесомости](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%B2%D0%B5%D1%81%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) при длительных космических перелётах. Примечательно, что основные его научные труды — по [аэронавтике](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%8D%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0), [ракетодинамике](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%BA%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BA%D0%B0" \o "Ракетодинамика) и космонавтике — начинались с попытки использовать математический аппарат для решения фантастических задач. Множество исследователей, в том числе [Я. Перельман](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BC%D0%B0%D0%BD,_%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B2_%D0%98%D1%81%D0%B8%D0%B4%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87), характеризовали Циолковского как мыслителя, существенно опередившего своё время.

После 1930-х годов в СССР вокруг Циолковского возник своеобразный миф о гениальном учёном-универсале, и миф этот распространился по всему миру, в том числе через [филателию](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%BB%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%8F) и [научно-фантастическую литературу](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0). Мощным стимулом к пропаганде достижений Циолковского стало [начало космической эры](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA-1), которое совпало с его столетием, отмечавшимся в 1957 году. Циолковскому установлены памятники в Калуге и Москве, существует его [дом-музей в Калуге](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%BC-%D0%BC%D1%83%D0%B7%D0%B5%D0%B9_%D0%9A._%D0%AD._%D0%A6%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE), есть музеи и в других городах. В 1954 году была учреждена [Медаль им. Циолковского](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D1%82%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B5%D0%B4%D0%B0%D0%BB%D1%8C_%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B8_%D0%9A._%D0%AD._%D0%A6%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE). В 1961 году в честь учёного был назван [кратер на обратной стороне Луны](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_(%D0%BB%D1%83%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BA%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%B5%D1%80)), а в 2015 году — [город](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_(%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B4)) при строящемся космодроме «[Восточный](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D1%8B%D0%B9_(%D0%BA%D0%BE%D1%81%D0%BC%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%BC))».

*Тяга* – реактивная сила, возникающая в результате истечения некоторого вещества из сопел ракеты. Рассмотрим такую модель движения ракеты, в которой все силы, кроме тяги, равны нулю, а сама ракета принимается за точку переменной массы.

Относительная скорость выброса частиц из сопел ракеты: , ( – орт вектора тяги). Первая задача Циолковского состоит в том, чтобы по заданному изменению массы ракеты за время от t0 до t найти приращение ее скорости за это же время.

Здесь движение точки переменной массы определяется уравнением: . Далее интегрируем от до и получаем форму Циолковского:

*Вторая задача Циолковского*:

Рассмотрим движение ракеты вертикально вверх в однородном поле силы тяжести планеты. Рассмотрим модель движения ракеты, в которой на неё действует тяга, направленная вертикально вверх и сила тяжести, направленная вертикально вниз. Сама ракета - точка переменной массы.

Относительная скорость выброса частиц из сопел ракеты: , ( – орт вектора тяги). Закон изменения массы ракеты как функции времени: , где не зависит от времени. Пусть - путь, пройденный ракетой за время t ().

Вторая задача Циолковского состоит в том, чтобы найти закон изменения пути, пройденного ракетой за данное время, используя величины , и начальному значению её скорости в начальный момент времени.

Здесь движение точки переменной массы определяется уравнением: , где - ускорение свободного падения в данном однородном поле силы тяжести (направленно вертикально вниз).

Находим ускорение, скорость и путь точки: